Concours des 24, 25 et 26 mai 1988 d'admission en 1ère année à l'INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS

MATHEMATIQUES (Options M.P.T.)

Dans tout le problème on notera E l'espace vectoriel des polynômes. Pour chaque entier naturel n, E_n désignera le sous espace de E formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n, et e_n sera le polynôme défini par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad e_n(x) = x^n$$

Ainsi $(e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n)$ constitue la base canonique de E_n. Pour tout couple (f, g) d'éléments de E, on notera :

$$(f/g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

On rappelle (le candidat n'a pas à le démontrer) que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Pour tout couple d'entiers naturels (p, q) vérifiant $0 \leq p \leq q$, on note : $C_q^p = \dfrac{q!}{p!(q-p)!}$

et on rappelle que $0! = 1$.

Enfin, lorsqu'aucune ambiguïté n'est possible, on notera : $f'(x)$ au lieu de $\dfrac{df}{dx}(x)$

et : $f^{(p)}(x)$ au lieu de $\dfrac{d^p f}{dx^p}(x)$

pour tout entier p, $p \geq 1$.

NB : La relation de récurrence à la question III.4 étant essentielle pour la suite du problème, le candidat pourra admettre l'existence des coefficients a, b et c (III.4.a) et se contenter de les calculer (III.4.b et c) ; il est prié d'indiquer clairement s'il démontre ou s'il admet tout résultat.

PARTIE I

n étant un entier naturel, et x un réel, on définit : $L_n(x) = \dfrac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} [C_n^k]^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k$

L_n est appelé "n^{ième} polynôme de LEGENDRE".

1. Expliciter, en les développant suivant les puissances croissantes de x : $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$.

2. Trouver une relation simple liant $L_n(x)$ et $L_n(-x)$.

3. En appliquant la formule de LEIBNIZ, expliciter : $\dfrac{d^n}{dx^n}[(x-1)^n(x+1)^n] = \dfrac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$

   en fonction de $L_n(x)$.

4. a) Calculer le terme de plus haut degré de L_n de deux manières différentes ; en déduire la valeur de :

$$\sum_{k=0}^{n} [C_n^k]^2$$

   b) Calculer $L_n(1)$.

5. En utilisant, pour x réel, les inégalités $|x-1| \leq 1 + |x|$ et $|x+1| \leq 1 + |x|$, trouver un majorant de $|L_n(x)|$ dépendant de n et de $Z = 1 + |x|$. Simplifier ce majorant le plus possible, en utilisant les résultats des questions 3 et 4.

T.S.V.P.

PARTIE II

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note : $f_n(x) = (x^2 - 1)^n$

et pour tout entier p vérifiant $0 \leq p \leq n$, on note : $\Delta_p(x) = \frac{d^p}{dx^p}[f_n(x)]$

1. Etablir que si p vérifie $0 \leq p \leq n - 1$, alors $(x^2 - 1)$ divise $\Delta_p(x)$.

2. En utilisant plusieurs fois le théorème de ROLLE, établir que Δ_p s'annule (au moins) p fois dans l'intervalle $]-1, +1[$.

   En déduire que toutes les racines de L_n sont distinctes, réelles, et appartiennent à l'intervalle $]-1, 1[$.

   Désormais on note $R(n)$ l'ensemble des racines du polynôme L_n ($n \in \mathbb{N}^*$) ; on a donc $R(n) \subset]-1, 1[$. Soit $\lambda(n)$ la plus grande de ces racines.

3. a) Démontrer que zéro est centre de symétrie de l'ensemble $R(n)$.

   b) Quelle est la plus petite racine du polynôme L_n ?

   c) Quel est le signe de $L_n(x)$ lorsque $x \in]\lambda(n), +\infty[$?

   d) Plus précisément, si le nombre réel a est tel que : $\forall x \in [a, +\infty]$, $L_n(x) > 0$

   que peut-on dire des nombres a et $\lambda(n)$?

PARTIE III

1. Etablir, par récurrence, que pour tout polynôme Q de E et tout entier naturel k vérifiant $0 \leq k \leq n$, on a :

$$(Q/L_n) = \frac{(-1)^k}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} \frac{d^k}{dx^k}[Q(x)] \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}[(x^2 - 1)^n] dx$$

2. a) Lorsque le degré du polynôme Q est strictement inférieur à n, dire à quoi est égal le produit scalaire (Q/L_n).

   b) En déduire la valeur de (L_m/L_n) lorsque $m \neq n$.

   c) Déduire de ce qui précède une propriété de la famille $(L_0, L_1, ..., L_n)$ par rapport à E_n.

3. a) En effectuant au préalable soit une intégration par parties, soit un changement de variable, calculer par récurrence l'intégrale :

$$h_n = \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

   b) En déduire la valeur de (L_n/L_n).

4. a) Soit n un entier naturel strictement positif. En raisonnant sur les degrés des polynômes, et en utilisant les résultats des questions 2 et 3, montrer qu'il existe trois réels a, b et c (dépendant de n) tels que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x L_n(x) = a L_{n-1}(x) + b L_n(x) + c L_{n-1}(x)$$

   b) Montrer que $b = 0$.

   c) Calculer a et c en utilisant la valeur de $L_n(1)$ et le coefficient de x^{n+1} dans les deux membres de l'égalité précédente.

   d) Que devient cette égalité lorsque $n = 0$?

Tournez la page S. V. P.

PARTIE IV

On étudie le sens de variation de la suite $[\lambda(n)]$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\lambda(1)$, $\lambda(2)$, $\lambda(3)$, et vérifier que $\lambda(1) < \lambda(2) < \lambda(3)$.

2. a) On suppose qu'au rang m ($m \in \mathbb{N}^*$), on a la suite d'inégalités :

   $\lambda(1) < \lambda(2) \ldots\ldots < \lambda(m-1) < \lambda(m)$.

   En utilisant la relation de récurrence établie à la question III.4., et les résultats de la question II.3., prouver que $\lambda(m) < \lambda(m+1)$.

   b) En déduire que la suite $[\lambda(m)]_{m \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et qu'elle admet une limite finie lorsque n tend vers l'infini.

PARTIE V

On considère deux réels : x fixe qui sert de paramètre, et y "variable". On désigne alors par $R(x)$ le rayon de convergence de la série entière de terme général $v_n(y) = L_n(x)\, y^n$, et on définit :

$$S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(y) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) y^n$$

lorsque la série converge.

1. En utilisant la majoration de $|L_n(x)|$ établie à la question I.5., et la notation $Z = 1 + |x|$, établir que pour tout x réel, on a $R(x) > 0$.

2. A l'aide de la relation de récurrence établie à la question III.4., et en transformant la somme :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \{(p+1)L_{p+1}(x) - (2p+1)xL_p(x) + pL_{p-1}(x)\} y^p$$

former une équation différentielle du premier ordre vérifiée par $S(y)$ pour $y \in]-R(x), +R(x)[$.

3. Résoudre cette équation différentielle et expliciter $S(y)$ en fonction de y et de x.

NB : Le calcul de $R(x)$ n'est pas demandé !

PARTIE VI

On rappelle que si les séries :

$$\sum_0^{\infty} u_n \quad et \quad \sum_0^{\infty} v_n$$

sont absolument convergentes, alors la série de terme général :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

(appelée série produit au sens de CAUCHY) est absolument convergente et vérifie :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$$

1. x et y étant réels et vérifiant $|y| < R(x)$, on écrit les relations précédentes dans le cas où $u_n = v_n = L_n(x)\, y^n$.

   a) Démontrer que l'on peut écrire $w_n = T_n(x)\, y^n$ et écrire T_n à l'aide des polynômes L_k. En déduire que T_n est un polynôme.

   b) Calculer :

   $$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) y^n = \mathcal{C}(y)$$

   lorsque $|y| < R(x)$; en déduire une relation de récurrence liant trois termes consécutifs de la suite :

   $$[T_n(x)]_{n \in \mathbb{N}}$$

2. Préciser le degré de T_n, son terme de plus haut degré, ainsi que sa parité. On explicitera $T_n(x)$ lorsque $0 \leq n \leq 3$.

3. Lorsque $x \in]-1,1[$, on pose $\theta = \text{Arcos } x$ (on a donc $0 < \theta < \pi$).

   Calculer et simplifier le produit $\sin\theta . T_n(\cos\theta)$ en fonction de θ et n.

4. a) Déterminer les racines de T_n appartenant à $]-1,1[$.

   b) Décomposer $T_n(x)$ en un produit de facteurs de degré un.

5. Soit $\mu(n)$ la plus grande des racines réelles de T_n.

   a) Calculer $\mu(n)$; quel est le sens de variation de la suite $[\mu(n)]_{n \in \mathbb{N}^*}$?

   b) Quel est le signe de $T_n(x)$ lorsque $x \in]\mu(n), \infty[$?

   c) Sachant que $(\forall x \in [a, \infty[)$, $T_n(x) > 0$, que peut-on affirmer concernant les réels a et $\mu(n)$?

6. Comparer $\lambda(n)$ et $\mu(n)$. (Une inégalité stricte est exigée).

7. Préciser le comportement des deux suites $[\lambda(n)]_n$ et $[\mu(n)]_n$ lorsque n tend vers l'infini.

***

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail